УДК 621.396.13

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ ПО МЕТОДУ ПРОНИ И МЕТОДУ МАТРИЧНЫХ ПУЧКОВ

Верстаков Евгений Васильевич
кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования ФГАОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»
E-mail: evverstakov@gmail.com.

Захарченко Владимир Дмитриевич
доктор технических наук, профессор кафедры радиофизики
ФГАОУ ВПО «Волгоградский государственный университет»
E-mail: Zakharchenko_VD@mail.ru.
Адрес: 400062 г. Волгоград, пр-т. Университетский, 100.

Аннотация: Рассмотрены двумерные модификации алгоритмов оценки параметров разложения двумерного сигнала методами Прони и матричных пучков. Представлены алгоритмы и структурные схемы рассматриваемых методов. Статистическое моделирование показало, что погрешность оценки параметров разложения двумерного сигнала по методу Прони выше погрешности оценки по методу матричных пучков на 25-30 дБ. Кроме того показана эффективность двумерного метода матричных пучков близостью к границе Крамера-Рао.

Ключевые слова: двумерный сигнал, двумерный метод Прони, метод матричных пучков, граница Крамера-Рао.

Вводные замечания

Двумерный спектральный анализ может использоваться для пространственно - пространственных массивов данных – при обработке (например, фильтрации) изображений; пространственно-временных массивов данных – при обработке гидролокационных, сейсмических и радиолокационных сигналов в случае синтезируемой апертуры; временно - временных массивов данных – при анализе интервала повторения радиолокационных импульсов в зависимости от момента их прихода [1]. Кроме того, методы оценки двумерных спектров можно использовать для оценки параметров центров рассеяния объектов сложной формы в сверхкороткоимпульсной радиолокации [2].

Одним из наиболее распространённых параметрических методов спектральной оценки является метод Прони [1,3]. Для моделирования выборочных двумерных данных в виде линейной комбинации двумерных экспонент на интервалах $t_1 \in [0,T_1]$ и $t_2 \in [0,T_2]$ ряд Прони можно записать в следующем виде:

$$x(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{N} A_i \exp(\lambda_{1i}t_1 + \lambda_{2i}t_2)\,, \qquad (1)$$

где N – заранее известный порядок разложения, $A_i, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}$ – комплексные константы. При этом аналогично одномерному варианту метода Прони можно полностью восстановить сигнал (1), наблюдая его ограниченный фрагмент на интервалах $[0,T_1]$, $[0,T_2]$.

Метод Прони для двумерных сигналов на основе линейно-разностной схемы

Для конечной последовательности отсчётов $r_{s,t}$, где $s = 1...S$ и $t = 1..T$, общая модель принятого сигнала имеет вид:

$$r_{s,t} = x_{s,t} + e_{s,t} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} C_{n,m} y_n^s z_m^t + e_{s,t}\,. \qquad (2)$$

Здесь $y_n = \exp(\alpha_n + j\omega_{1n})$ и $z_n = \exp(\beta_n + j\omega_{2n})$ – полюсы, причём $y_0 = z_0 = 1$, $C_{n,m} = A_{n.m}\exp(j\varphi_{n,m})$ – комплексные амплитуды, $e_{s,t}$ – отсчёты белого гауссова шума.

Модель (1) является частным случаем более общей модели (2), поскольку в общем случае для каждой размерности предполагается разный порядок разложения. Двумерный ряд (1) можно получить из (2) при условии $M = N$, тогда $C_{n,m} = 0$ для $m \neq n$, т.е. когда матрица амплитуд $C_{n,m}$ станет диагональной. Тогда для модели последовательности с комплексными параметрами

$$x_{s,t} = \sum_{i=1}^{N} A_i y_i^s z_i^t , \quad (3)$$

так же как и для модели (2) по аналогии с одномерным случаем [1], выражение (2) является решением однородного линейно-разностного уравнения с постоянными коэффициентами [4, 5], которое можно разделить на два независимых:

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} a_{n,m} x_{s-n,t-m} = 0 , \quad (4)$$

где $a_{n,m}$ – коэффициенты полинома $P(y,z)$, корнями которого являются экспоненты y_n, z_m:

$$P(y,z) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} a_{i,j} y^{N-i} z^{M-j} = P_1(y) P_2(z) , \quad (5)$$

где $P_1(y) = \prod_{i=1}^{N} (y - y_i) = \sum_{i=0}^{N} a_i^{(1)} y^{N-i}$, $P_2(z) = \prod_{j=1}^{M} (z - z_j) = \sum_{j=0}^{M} a_j^{(2)} z^{M-j}$. Корнями полиномов $P_1(y)$, $P_2(z)$ являются экспоненты y_n, z_m соответственно, причём $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = 1$, $a_{i,j} = a_i^{(1)} a_j^{(2)}$. Несложно показать, что разностное уравнение (4) можно разделить на две независимые части и разрешить по отдельности. Тогда задачу нахождения коэффициентов $a_n^{(1)}$, $a_m^{(2)}$ можно разделить на две независимые подзадачи по оценке этих коэффициентов:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n^{(1)} x_{s-n,K} = 0 , \quad \sum_{m=0}^{M} a_m^{(2)} x_{L,t-m} = 0 . \quad (6)$$

Далее, получив оценки коэффициентов разностного уравнения (4), исходя из выражений (6), с помощью классических методов можно определить корни полиномов $P_1(y)$, $P_2(z)$, подставляя в них уже полученные коэффициенты $a_n^{(1)}$, $a_m^{(2)}$.

Для вычисления комплексных амплитуд A_i в (3) предлагается следующий подход [5]. Переписывая выражение (3) в матричном виде, а также зная все y_i и z_i, и формируя соответствующие матрицы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$, диагональную матрицу $\mathbf{A}$ можно определить следующим образом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}^{+} \mathbf{X} \mathbf{Z}^{+} . \quad (7)$$

Здесь

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{S-1} & y_2^{S-1} & \cdots & y_N^{S-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{T-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{T-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_N & \cdots & z_N^{T-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

- соответствующие матрицы Вандермонда экспонент y_i, z_i, где знаком «+» в матричном анализе обозначается так называемая инверсия Мура-Пенроуза [6], что для матриц $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ будет означать следующее:

$$\mathbf{Y}^{+} = \left(\mathbf{Y}^{H}\mathbf{Y}\right)^{-1}\mathbf{Y}^{H}, \quad \mathbf{Z}^{+} = \mathbf{Z}^{H}\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{H}\right)^{-1} .$$

Здесь знаком «*H*» обозначена операция эрмитового сопряжения матриц.

Таким образом, построение разложения в двумерный ряд Прони с использованием $S \times T$ эквидистантных отсчетов последовательности (1) предполагает выполнение следующих операций:

1. Решение систем уравнений, составленных из S и T отсчетов сигнала:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n^{(1)} x_{s-n,K} = 0 , \qquad \sum_{m=0}^{M} a_m^{(2)} x_{L,t-m} = 0 ,$$

где $N+1 \le s \le S$, $N+1 \le t \le T$, $K, L = const$ относительно коэффициентов $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ соответственно, причём $a_0^{(1)} = a_0^{(2)} = 1$.

2. Нахождение корней y_i, z_i полиномов *N*-й степени

$$P_1(y) = \prod_{i=1}^{N} (y - y_i) = \sum_{i=0}^{N} a_i^{(1)} y^{N-i} ,$$

$$P_2(z) = \prod_{j=1}^{M} (z - z_j) = \sum_{j=0}^{M} a_j^{(2)} z^{M-j} .$$

3. Вычисление комплексных амплитуд, стоящих на главной диагонали матрицы $\mathbf{A}$ из выражения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}^{+}\mathbf{X}\mathbf{Z}^{+}.$$

Структурная схема алгоритма представлена на рис.1.

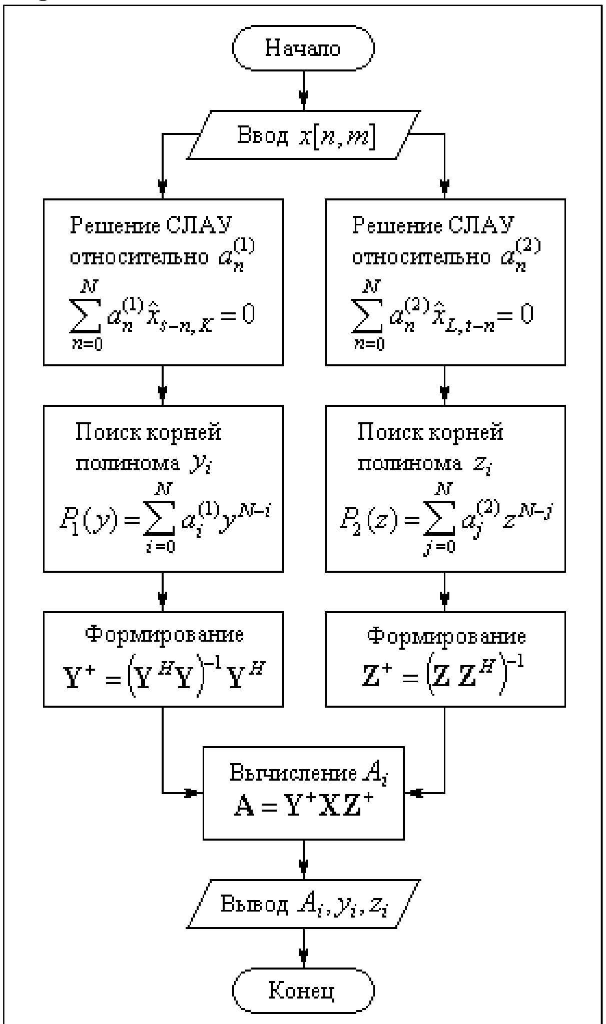

Рис. 1. Структурная схема алгоритма построения разложения в двумерный ряд Прони

Метод матричных пучков для двумерных сигналов на основе одномерного алгоритма

В методе матричных пучков [7] используется та же модель, что и в методе Прони, отличающаяся лишь способом оценки неизвестных параметров разложения. Поэтому для данной модели можно применить предложенную модификацию, аналогично методу Прони [4].

Для двумерной последовательности вида:

$$x[n,m] = \sum_{i=1}^{N} a_i d_{1i}^{n} d_{2i}^{m}, \qquad (9)$$

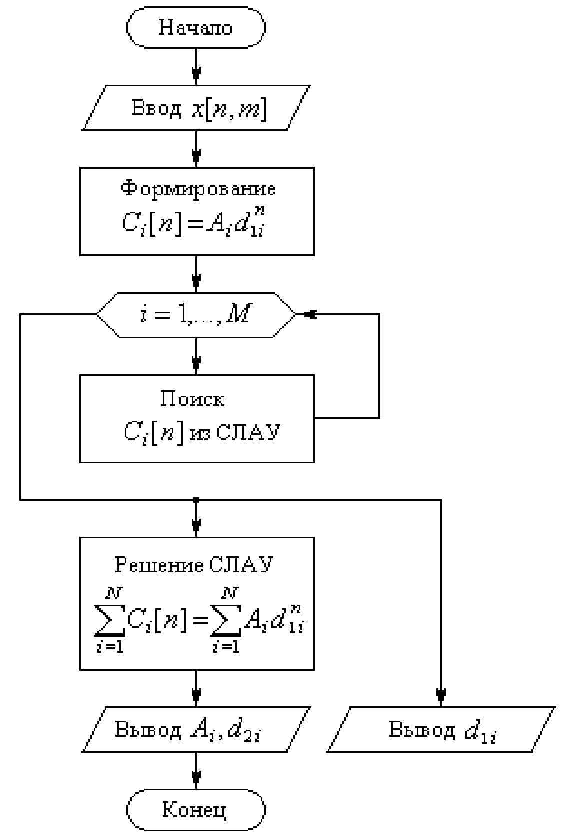

Рис. 2. Структурная схема алгоритма по методу матричных пучков

где для удобства обозначено $d_{1i} = e^{(\alpha_i + j\omega_{1i})\Delta t}$ и $d_{2i} = e^{(\beta_i + j\omega_{2i})\Delta t}$, можно ввести матрицу $c_i[n] = a_i d_{1i}^{n}$, тогда выражение (9) примет вид: $x[n,m] = \sum_{i=1}^{N} c_i[n] d_{2i}^{m}$, что является системой из n одномерных последовательностей, для которых можно применить одномерный алгоритм метода матричных пучков. Тем самым можно получить матрицу значений $c_i[n]$ и n значений d_{2i}, которые можно усреднить по n. По полученным значениям $c_i[n]$ можно также вычислить параметры a_i и d_{1i}, предварительно просуммировав по i все $c_i[n]$, т.е. применить метод матричных пучков к одномерной последовательности вида $\sum_{i=1}^{N} c_i[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i d_{1i}^{n}$.

Данный алгоритм представлен структурной схемой, изображенной на рис.2.

Результаты статистического моделирования

Для численной оценки потенциальной точности предложенных параметрических методов рассматривалась двумерная последовательность отсчетов сигнала:

$$x[n,m] = Ae^{\lambda_1 n\Delta t + \lambda_2 m\Delta t}\cos(\omega_1 n\Delta t + \omega_2 m\Delta t) + \xi[n,m], \quad (10)$$

где $A = 10{,}0$, $\lambda_1 = -1{,}0$, $\lambda_2 = -1{,}4$, $\omega_1 = 50{,}0$, $\omega_2 = 40{,}0$, $\Delta t = 0{,}01$ - значения параметров, $\xi[n,m]$ – отсчеты двумерного белого гауссова шума, $n = 1,...N$, $m = 1,...M$ $(N, M = 50)$. Вид сигнала, формирующего последовательность (1), представлен на рис. 3.

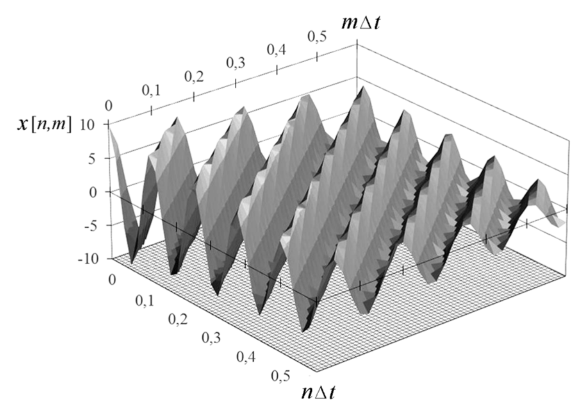

Рис.3. Исходная двумерная последовательность (10)

В результате статистического моделирования были получены зависимости среднеквадратической погрешности оценки параметров $\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2$ от отношения шум/сигнал, представленные на рис. 4 (а-г). Значения отношения шум/сигнал (σ_ξ / A) по оси абсцисс отложены в логарифмическом масштабе. Значения отсчётов на графиках усреднены по 400 реализациям шума. Здесь же приведены границы потенциальной помехоустойчивости Крамера-Рао, рассчитанные для каждого из параметров [8,9].

Из рисунков видно, что погрешность оценки параметров разложения двумерного сигнала методом матричных пучков меньше погрешности оценки по методу Прони в среднем на 25-30 дБ. Кроме того, оценка параметров сигнала, использующая модификацию метода матричных пучков для двумерных сигналов, является эффективной, поскольку практически достигает своей потенциальной точности (погрешность оценки лежит выше границы Крамера-Рао в среднем на ~ 3 дБ). Однако следует отметить, что метод матричных пучков более требователен к объёму ресурсов ЭВМ, что сказывается на скорости вычислений: его скорость на порядок ниже скорости вычислений по методу Прони. Для уменьшения погрешности оценок по методу Прони можно воспользоваться предложенным в [10] способом на каждом этапе вычисления параметров разложения двумерного сигнала.

Заключение

В работе рассмотрены методы отыскания параметров двумерных сигналов, представленные моделью (3) - метод Прони и метод матричных пучков. Предложенные алгоритмы отыскания параметров разложения двумерного сигнала, представленного суммой экспонент, являются обобщением классических одномерных алгоритмов. В результате статистического моделирования получены зависимости среднеквадратических погрешностей оценки параметров двумерного сигнала от уровня аддитивного шума, всегда присутствующего в процессе измерений.

Использование неравенств Крамера-Рао при определении потенциальной точности оценки параметров разложения двумерного сигнала и модельные расчёты показывают, что предложенный алгоритм разложения по методу Прони не является оптимальным и допускает усовершенствование, в отличие от предложенного алгоритма по методу матричных пучков.

Литература

1. Марпл – мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его применения: Пер. с англ. - М.: Мир. – 1990. 584 с.
2. Коновалюк М.А., Кузнецов Ю.В., Баев А.Б. Идентификация объектов сложной формы в сверхкороткоимпульсной радиолокации // Радиолокация и радиосвязь: Доклады 3-й Всероссийской научно-технической конференции «Радиолокация и радиосвязь». – Москва. 2009. – Т.2. – С. 175-179.
3. Верстаков Е.В., Захарченко В.Д. Исследование потенциальной точности разложения сигнала в ряд Прони в условиях помех // Успехи современной радиоэлектроники. – 2009. –№8. – С. 78-80.

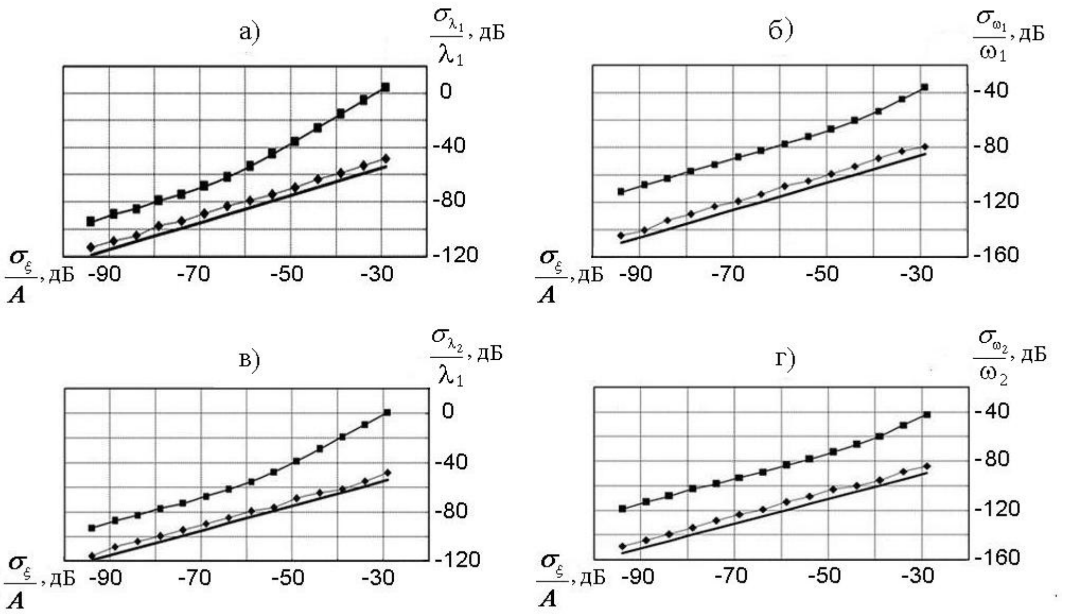

Рис. 4. Результаты статистического моделирования

■ - метод Прони; ♦ - модификация метода матричных пучков; ▬▬ - граница Крамера-Рао

4. Верстаков Е.В., Захарченко В.Д., Гаврин Д.С. Построение параметрического разложения двумерных сигналов на основе модификаций метода Прони // Нелинейный мир – 2012. – №11. Т.10 – С. 724-730.

5. Barbieri M., Barone P.A. Two-Dimensional Prony ’s Method for Spectral Estimation // IEEE Transactions On Signal Processing. – vol. 40. – № 11. – 1992. – pp. 2747-2756.

6. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание: Пер. с англ. – М.: Наука. – 1977. 224 с.

7. Активные фазированные антенные решетки / Под ред. Д.И. Воскресенского, А.Н. Канащенкова. – М.: Радиотехника. – 2004. 488 с.

8. Верстаков Е.В. Способ оценки параметров разложения двумерных сигналов с помощью модификации метода Прони // Излучение и рассеяние электромагнитных волн: Труды Международной научной конференции «Излучение и рассеяние ЭМВ – ИРЭМВ-2011». – Таганрог. – 2011. – С. 423-427.

9. Верстаков Е.В., Захарченко В.Д. Потенциальная точность представления двумерного сигнала рядом Прони // Известия Волгоградского государственного технического университета: межвузовский сборник научных статей №4 (42). – Волгоград: ВолгГТУ. – 2010. – С. 76–79.

10. Патент РФ № 2430382 Способ оценки параметров широкополосных радиосигналов по методу Прони. / Верстаков Е.В., Захарченко В.Д. – опубл.: БИПМ №27, 2011.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 15-47-02438-р_поволжье_а, 14-02-97001-р_поволжье_а, 14-07-97030-р_поволжье_а).

Поступила 16 декабря 2014 г.

English

The comparative analysis of approximation algorithms of two-dimensional signals by Proni method and matrix bunches method

Evgeny Vasilyevich Verstakov – Candidate of Engineering, Associate Professor, Department of Information Systems and Computer Simulation federal state budgetary educational institution of higher professional education «Volgograd State University».

E-mail: evverstakov@gmail.com.

Vladimir Dmitriyevich Zakharchenko – Doctor of Engineering, Professor Radio physics Department federal state budgetary educational institution of higher professional education «Volgograd State University».

E-mail: Zakharchenko_VD@mail.ru.

Address: 400062 Volgograd, Universitetsky prospect, 100.

Abstract: The application of two-dimensional spectral estimation methods is necessary in solving the tasks of two-dimensional data processing, in particular, when processing radar signals and image filtering. Algorithms of two-dimensional spectral analysis can also be used for estimation parameters of scattering centers of objects with complex shape in super short impulsive radiolocation. The article considers approximation algorithms of two-dimensional signals by Proni method and matrix bunches method. The proposed algorithms of identifying decomposition parameters of a two-dimensional signal presented by the total of exponents are the generalization of classic one-dimensional algorithms. The dependences of mean square root inaccuracies of estimation of two-dimensional signal parameters on the level of an additive noise which is always present in measuring process are received as a result of statistical modeling. Statistical modeling has demonstrated that inaccuracy of parameters estimation of two-dimensional signal decomposition by matrix bunches method is by a mean of 25-30 dBs less than inaccuracy of estimation by Proni method. Besides, the parameters estimation of a two-dimensional signal by the modified method of matrix bunches method for two-dimensional signals is efficient as it practically reaches its potential exactitude (estimation inaccuracy is above Cramer-Rao boundary by a mean of 3 dBs). However it should be noted that calculating speed by matrix bunches method is significantly less than computation speed by Proni method. Application of Cramer-Rao inequation when determining potential exactitude of estimation of decomposition parameters of a two-dimensional signal and model calculations demonstrate that the proposed algorithm of decomposition by Proni method in contrast to the suggested algorithm of decomposition by matrix bunches method is not optimal and allows enhancement when using supplementary algorithms at each calculation stage of two-dimensional signal decomposition parameters.

Key words: two-dimensional signal, two-dimensional Proni method, matrix bunches method, Cramer-Rao boundary.

References

1. Marpl Jr. S. L. Numeral spectral analysis and its application: Tr. From English M.: Mir. - 1990. 584 p.
2. Konovalyuk M.A., Kuznetsov Yu.V., Bayev A.B. Identification of objects having complex form in a super short impulsive radiolocation. - Radiolocation and radio service: Reports of 3rd All-Russia technological conference «Radiolocation and radio service». - Moscow. 2009. – Vol. .2. - P. 175-179.
3. Verstakov E.V., Zakharchenko V.D. Investigation of potential exactitude of signal decomposition in Proni series under the conditions of noises. - Uspekhi sovremennoy radioelectroniki. - 2009.-№8. - P. 78-80.
4. Verstakov E.V., Zakharchenko V.D., Gavrin D.S.Creation of parametric decomposition of two-dimensional signals on the basis of Proni method modifications. - Nelineiny Mir - 2012. - №11. Vol.10 - P. 724-730.
5. Barbieri M., Barone P.A. Two-Dimensional Prony ’s Method for Spectral Estimation. - IEEE Transactions On Signal Processing. - Vol. 40. - № 11. - 1992. - Pp. 2747-2756.
6. Albert A. Regression, pseudo-inversion and recurrent estimation: Transl. from English - M.: Nauka. - 1977. 224 p.
7. Active phased antenna arrays. - Ed. By D.I. Voskresensky, A.N. Kanashchenkova. - M.: Radiotekhnica. - 2004. 488 p
8. Verstakov E.V. Estimation method of decomposition parameters of two-dimensional signals by modification of Proni method. - Radiation and scattering electromagnetic waves: Collection of works of the International scientific conference «Izluchenie I rasseyanie EMV - IREMV-2011». - Taganrog. - 2011. - P. 423-427.
9. Verstakov E.V., Zakharchenko V.D. Potential exactitude of representation of a two-dimensional signal by Proni series. - Izvestya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta: collection of works №4 (42). - Volgograd: VolgGTU. - 2010. - P. 76-79.
10. Verstakov E.V., Zakharchenko V.D. Method parameters estimation of broad-band wireless signals by Proni method. - The patent of the Russian Federation № 2430382 from 9/27/2011. Inventions. The useful models. - 2011, №27.